Trouver les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1}{x(x-\ln x)^n}$ $(n\in\mathbb{N})$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh}x)} - \sqrt[3]{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-1\right]}{\ln x}$

---

a) $x-\ln x \underset{0}{\sim} -\ln x$ car $\lim\limits_{0} \dfrac{x-\ln x}{-\ln x} = \lim\limits_{0}\left(1-\dfrac{x}{\ln x}\right)=1$

Donc $\dfrac{1}{x(x-\ln x)^n} \sim \dfrac{1}{x(-\ln x)^n} \longrightarrow +\infty.$

Ccl : $\boxed{\lim\limits_{0_+} \dfrac{1}{x(x-\ln x)^n} = +\infty}$

b) On utilise l'identité $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$\sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh}x)}-\sqrt[3]{x} = \frac{\ln(\operatorname{sh}x) - x}{\left(\sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh}x)}\right)^2+\sqrt[3]{\ln(\operatorname{sh}x)}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} \longrightarrow 0 \quad (x\to+\infty)$$

car le dénominateur tend vers $+\infty$, et le numérateur s'écrit :

$$\ln(\operatorname{sh}x)-x = \ln\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x = \ln\frac{e^x(1-e^{-2x})}{2}-x = \ln\frac{1-e^{-2x}}{2}$$

qui tend vers $\ln\frac{1}{2}$ quand $x\to+\infty$.

2e solution :

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x(1-e^{-2x})}{2} \Rightarrow \ln\operatorname{sh}x = x-\ln 2+\ln(1-e^{-2x})$$
$$= x-\ln 2 - e^{-2x}+o(e^{-2x})$$

donc
$$\sqrt[3]{\ln\operatorname{sh}x} = \sqrt[3]{x}\left(1-\frac{\ln 2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/3}$$
$$= \sqrt[3]{x}\underbrace{\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{1/3}}_{1+\frac{1}{3}O\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(O\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

(ENSI 77)

soit : $\sqrt[3]{\ln \operatorname{sh} x} = \sqrt[3]{x}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

de sorte que $\sqrt[3]{\ln \operatorname{sh} x} - \sqrt[3]{x} = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty}\left(\sqrt[3]{\ln \operatorname{sh} x} - \sqrt[3]{x}\right) = 0}$

c) Pour $x \to +\infty$,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = 1 + \frac{1}{x}\ln(1+x) + o\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$$

d'où $(1+x)^{1/x} - 1 \sim \frac{1}{x}\ln(1+x) \sim \frac{\ln x}{x}$

et $\boxed{\lim_{+\infty} \frac{x\left[(1+x)^{1/x} - 1\right]}{\ln x} = 1}$.